回答 1

術　文（答）

円の直径＝1.12•（正方形の一辺）

現代的解法

与えられた正方形の一辺の長さを a として求める円の直径を d とすると

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\therefore \quad d = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a \fallingdotseq 1.128\,a$$

回答 2

術　文（答）

$$\text{等円の直径} = \sqrt{(\text{黒い面積})/(1-\pi/4)} \cdot \frac{1}{2}$$

現代的解法

求める等円の直径を d，黒い部分の面積を S とする（図 4）.

$$4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + S = (2d)^2$$

$$\therefore \quad (4-\pi)d^2 = S$$

$$\therefore \quad d = \sqrt{S/(4-\pi)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{S/(1-\pi/4)}$$

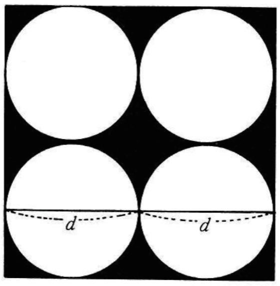

図　4

回答 3

術　文（答）

乙正方形の一辺＝($\sqrt{5}-1$)/2（甲正方形の一辺）

現代的解法

（其の 1）

求める乙正方形の一辺を x，甲正方形の一辺を a とすると斜線の部分は相等しい（図 5），依って次の方程式が得られる.

$$x(x+a) = a^2$$

これから　$x = (\sqrt{5}-1)/2 \cdot a$.

（其の 2）

直角三角形 ABC で（図 5）

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 = (AD+DB)^2$$

すなわち

$$(x+a)^2 + (x+2a)^2$$
$$= (\sqrt{(x+a)^2+a^2} + \sqrt{x^2+a^2})^2$$

これから

$$(x^2+ax-a^2)^2 = 0$$

を得る.

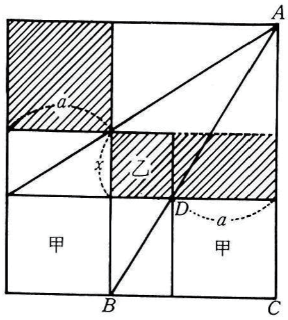

図　5

回答 4

術　文（答）

$$p=\sqrt{6054+4014\sqrt{2}}$$ とすると

長軸＝$(40+53\sqrt{2}-p)$・黒径

$$=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}})$$・黒

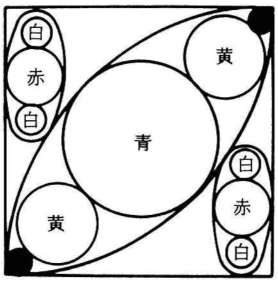

図　6

解　法

楕円O：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

とし正方形の一辺をxとすると（図７），楕円Oが円Cに点Pで接し楕円の点Pでの法線PHOの長さをRとするとき次ぎの２つの基公式が成り立つ

の２つの基公式が成り立つ

$$b^2(b^2-aR)x^2+2ab^2R(a-R)x+a^2R^2(b^2-aR)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$b^2(b-R)x^2-2R(a^2R-b^3)x+a^2R^2(b-R)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(1)\times(b-R)-(2)\times(b^2-aR)$$

$$aR^2=b^3 \qquad \therefore\quad R=b\sqrt{\frac{b}{a}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)を(2)に代入すると

$$x^2-2(a+b+\sqrt{ab})x+ab=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

次ぎに白円 O_1が楕円周とAで接し赤円がBで接するから（図８），その条件は　$b=\dfrac{a}{2}$

これを(4)に代入すると

$$a^2-2(3+\sqrt{2})ax+2x^2=0$$

$$\therefore\quad a=(3+\sqrt{2}\pm\sqrt{9+6\sqrt{2}})x$$

複号±は負をとって

$$a=(3+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}})x$$

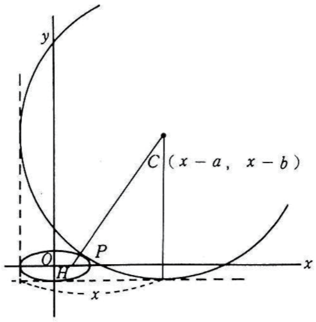

図　7

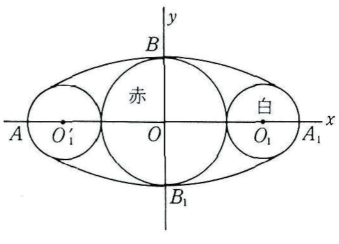

図　8

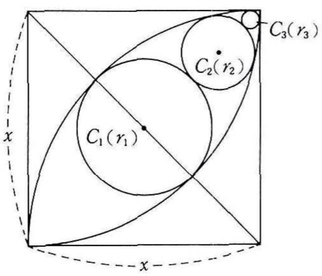

図　9

また図９で r_3を知りaを求める．

$$x=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)r_1=\sqrt{2}(3+\sqrt{2})r_2$$

$$=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})r_3$$

これを(5)に代入すると

$$a=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}}\ r^3.$$

注　この解答は直井功教諭によるものである．

回答 5

術　文（答）　$\sqrt{(897-\sqrt{620289})/720}$（正方形の一辺）

注　原問題の答の中で不明の部分は筆者の推定であって(1)は七，(2)は側とする（第10図）．

解　法

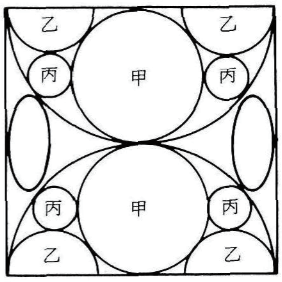

図　10

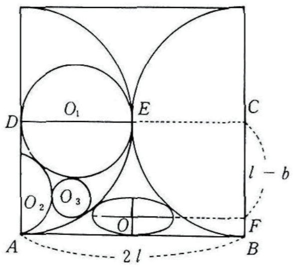

図　11

正方形の一辺を２ l とすると円 O_1，O_2，O_3の半径はそれぞれ $l/2$，$l/3$，$l/6$（図11）

$$\text{楕円を}\quad \frac{x^2}{O^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とすると，題意から　$b=$円 O_3の半径 $l/6$

また，和算の研究　雑論Ｉ〔(3)〕109頁から

$$A=a^2+b^2+r^2-OF^2-C'F^2=a^2+\left(\frac{l}{6}\right)^2+l^2-l^2-\left(\frac{5}{6}l\right)^2=a^2-\frac{2}{3}l^2 \qquad (a)$$

$$-B=a^2b^2+a^2r^2+b^2r^2-b^2OF^2-a^2C'F^2=a^2\left(\frac{l}{6}\right)^2+a^2l^2+b^2l^2-b^2l^2-a^2\left(\frac{5}{6}l\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}a^2l^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

(a)，(b)を次式に代入して整理すると

$$b^2rA-2Bx-3a^2rx^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$3b^4r^2+2b^2rAx-Bx^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

注（ｉ）　上の二式は和算の研究雑論Ｉ　109頁の(5)(6)

$$(3a^2-2l^2)l^2+72a^2lx+36\cdot9a^2x^2=0$$

$$l^4+8(3a^2-2l^2)lx+36\cdot4a^2x^2=0$$

となり，この２つの方程式から x を消去して整理すると

$$360a^4-897a^2l^2+128l^4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$\therefore\quad a^2=(897\pm\sqrt{897^2-4\cdot360\cdot128})/720\cdot l^2$$

ここで　$a<l$　だから

$$a=\sqrt{\frac{897-\sqrt{620289}}{720}}\,l$$

注（ii）　和算の研究　雑論Ｉ，117頁　中頃のつぎの２式；

$$b^2(a^2+2br-r^2)+4a^2bx+3a^2x^2=0$$

$$3b^3r+2b(a^2+2br-r^2)x+2a^2x^2=0$$

から x を消去して作られた a に関するつぎの方程式

$$\left(5br^3-7b^2r^2-r^4+\frac{b^3r^2}{r-b}\right)+\left(2r^2+3br-\frac{b^2r}{r-b}\right)a^2-a^4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

のうち a^2の係数の最後の項 $\dfrac{b^2r}{r-b}$ は $\dfrac{b^2r}{4(r-b)}$ の間違いである．従って(d)の方程式を訂正して

b_1r にそれぞれ $r=l$，$b=l/6$ を代入して整頓すると(c)が得られる．