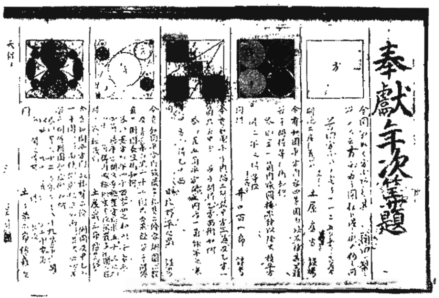
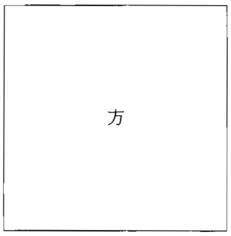
※田代神社算額資料　岐阜県の算額解説(高木重之著)より抜粋

3．養老郡養老町高田　田代神社　天保12年（1841）　5問題

田代神社の算額





第 6 図

（第一問題）

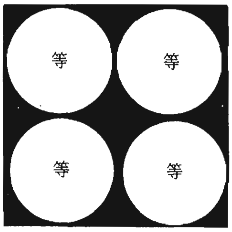
今図能如く方面阿梨其（三字不明）円田を繋と欲寿只云方面若干

円径を得る術如何にと問

答曰方面残置定法一一二を乗して得る

十二歳童

関流　土屋信義門人　土屋房吉　謹考



第 7 図

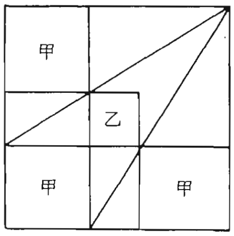
（第二問題）

今有如図平方内容四等円而設黒積其黒積若干問得等径術如何

答曰置一個減円積率餘以除黒積平方開之半之得等径

十三歳童

同門　井口百一郎　謹考



第 8 図

（第三問題）

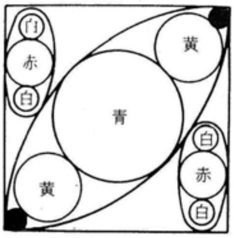
今有如図平方内隔二斜容甲方及乙方一個只云甲方面若干問得乙方

面術如何

答曰置五個平方開之内減一個餘半之乗甲方面得乙方面

十一歳童子

同門　日比野平之亟　謹考



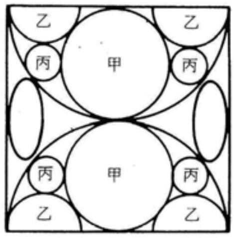
第 9 図

（第四問題）

今有如図平方内設最多弧背二条容側円（円柱斜截之其截面形名側円）及青黄赤白黒一十一円只云黒径若干問最多側円長径術如何

答曰置方斜率四千百零四之加六千零五十四個得平方開之号極置方斜率五十三之加四十零個得内減極餘乗黒径得最多側円長径

関流　谷松茂門人　土屋武三郎信篤　謹考



第 10 図

（第五問題）

今有如図平方内設弧背二条容側円及甲乙丙一十円（乃乙者半円也）而使側円短径如丙円径只云方面若干問得側円長径術如何

答曰置六十二万零二百八十九個平方開之以減八百九十七個餘以[1]〔不明〕百二十零個除之平方開之得乗方面得[2]〔不明〕円長径

同門　土屋恭二郎信義　謹考

題　意

第 1 問題

与えられた正方形に等しい面積を持つ円の直径を求めよ（第 6 図）.

術　文（答）

円の直径＝1.12・(正方形の一辺)

現代的解法

与えられた正方形の一辺の長さを a として求める円の直径を d とすると

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=a^2$$

$$\therefore \quad d = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a \fallingdotseq 1.128\, a$$

第 2 問題

与えられた正方形の中へ 4 個の等円を入れる．黒い部分の面積を知って等円の直径を求めよ（第 7 図）．

術　文（答）

$$\text{等円の直径} = \sqrt{(\text{黒い面積})/(1-\pi/4)} \cdot \frac{1}{2}$$

現代的解法

求める等円の直径を d，黒い部分の面積を S とする（図 4）．

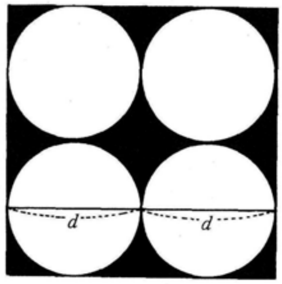


図　4

$$4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + S = (2d)^2$$

$$\therefore \quad (4-\pi)d^2 = S$$

$$\therefore \quad d = \sqrt{S/(4-\pi)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{S/(1-\pi/4)}$$

第 3 問題

正方形の内に 2 個の斜線を作り甲の正方形 3 個と乙正方形 1 個を入れる．甲正方形の一辺の長さを知って乙正方形の一辺の長さを求めよ（第 8 図）．

術　文（答）

乙正方形の一辺$=(\sqrt{5}-1)/2$（甲正方形の一辺）

現代的解法

（其の 1）

求める乙正方形の一辺を x，甲正方形の一辺を a とすると斜線の部分は相等しい（図 5），依って次の方程式が得られる．

$$x(x+a) = a^2$$

これから　$x = (\sqrt{5}-1)/2 \cdot a$．

（其の 2）

直角三角形 ABC で（図 5）

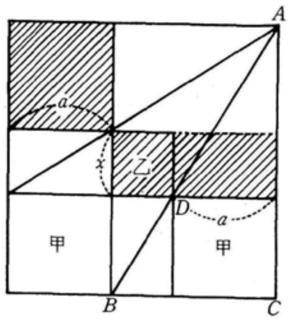


図　5

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 = (AD+DB)^2$$

すなわち

$$(x+a)^2 + (x+2a)^2$$
$$= (\sqrt{(x+a)^2+a^2} + \sqrt{x^2+a^2})^2$$

これから

$$(x^2+ax-a^2)^2 = 0$$

を得る．

第4問題

正方形内に4分円弧を書き，その内に円弧に接する最大な青円を書き，順次に接する黄，黒円2個ずつ入れる．

そして正方形の二辺に長軸と短軸が夫々平行になるような楕円が正方形と円弧に接している．その楕円に内接する最大な赤円を書き，この赤円と楕円の長軸の端でこの楕円に接する円を白円とする．黒円が与えられているとし，白円が最大となるような楕円の長軸の長さを求めよ（第9図）．

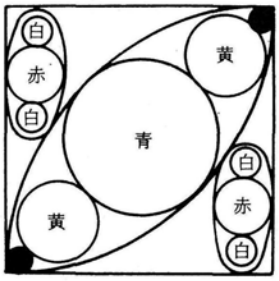


図　6

術　文（答）

$$p=\sqrt{6054+4014\sqrt{2}}\quad とすると$$

$$長軸=(40+53\sqrt{2}-p)\cdot 黒径$$

$$=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}})\cdot 黒$$

解　法

$$楕円O:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とし正方形の一辺をxとすると（図7），楕円Oが円Cに点Pで接し楕円の点Pでの法線PHOの長さをRとするとき次ぎの2つの基公式が成り立つ

の2つの基公式が成り立つ

$$b^2(b^2-aR)x^2+2ab^2R(a-R)x+a^2R^2(b^2-aR)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$b^2(b-R)x^2-2R(a^2R-b^3)x+a^2R^2(b-R)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(1)\times(b-R)-(2)\times(b^2-aR)$$

$$aR^2=b^3 \qquad \therefore\quad R=b\sqrt{\frac{b}{a}} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)を(2)に代入すると

$$x^2-2(a+b+\sqrt{ab})x+ab=0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

次ぎに白円 O_1が楕円周とAで接し赤円がBで接するから（図8），その条件は　$b=\dfrac{a}{2}$

これを(4)に代入すると

$$a^2-2(3+\sqrt{2})ax+2x^2=0$$

$$\therefore\quad a=(3+\sqrt{2}\pm\sqrt{9+6\sqrt{2}})x$$

複号±は負をとって

$$a=(3+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}})x$$

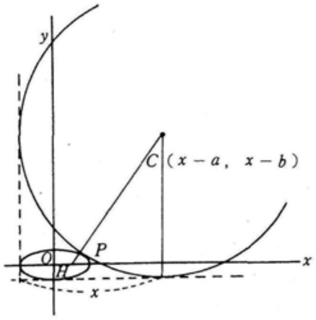


図　7

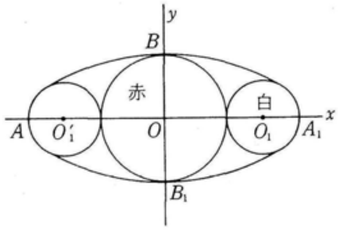


図　8

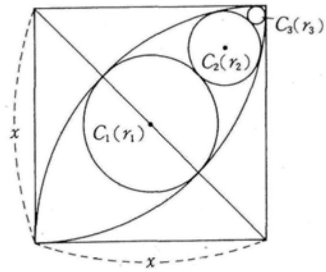


図　9

また図９で r_3を知り a を求める.

$$x=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)r_1=\sqrt{2}(3+\sqrt{2})r_2$$
$$=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})r_3$$

これを(5)に代入すると

$$a=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}}\ r^3.$$

注　この解答は直井功教諭によるものである.

第５問題

与えられた正方形の内に２個の半円孤を書き楕円と甲乙丙の10個の円を入れる（乙円は半円である）. 楕円の短径が丙円の直径に等しいとき楕円の長径を求めよ（図10).

術　文（答）　$\sqrt{(897-\sqrt{620289})/720}$（正方形の一辺）

注　原問題の答の中で不明の部分は筆者の推定であって(1)は七，(2)は側とする（第10図).

解　法

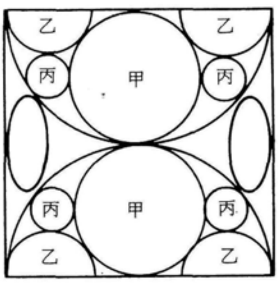


図　10

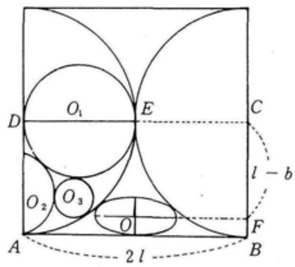


図　11

正方形の一辺を２ l とすると円 O_1, O_2, O_3の半径はそれぞれ $l/2$, $l/3$, $l/6$（図11）

$$楕円を\quad \frac{x^2}{O^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とすると，題意から　$b=$円 O_3の半径 $l/6$

また，和算の研究　雑論Ｉ〔(3)〕109頁から

$$A=a^2+b^2+r^2-OF^2-C'F^2=a^2+\left(\frac{l}{6}\right)^2+l^2-l^2-\left(\frac{5}{6}l\right)^2=a^2-\frac{2}{3}l^2 \qquad (a)$$

$$-B=a^2b^2+a^2r^2+b^2r^2-b^2OF^2-a^2C'F^2=a^2\left(\frac{l}{6}\right)^2+a^2l^2+b^2l^2-b^2l^2-a^2\left(\frac{5}{6}l\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}a^2l^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

(a), (b)を次式に代入して整理すると

$$b^2rA-2Bx-3a^2rx^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$3b^4r^2+2b^2rAx-Bx^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

注(i) 上の二式は和算の研究雑論 I 109頁の(5)(6)

$$(3a^2-2l^2)l^2+72a^2lx+36\cdot9a^2x^2=0$$

$$l^4+8(3a^2-2l^2)lx+36\cdot4a^2x^2=0$$

となり，この2つの方程式からxを消去して整理すると

$$360a^4-897a^2l^2+128l^4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$\therefore\quad a^2=(897\pm\sqrt{897^2-4\cdot360\cdot128})/720\cdot l^2$$

ここで　$a<l$　だから

$$a=\sqrt{\frac{897-\sqrt{620289}}{720}l}$$

注(ii) 和算の研究　雑論 I，117頁　中頃のつぎの2式；

$$b^2(a^2+2br-r^2)+4a^2bx+3a^2x^2=0$$

$$3b^3r+2b(a^2+2br-r^2)x+2a^2x^2=0$$

からxを消去して作られたaに関するつぎの方程式

$$\left(5br^3-7b^2r^2-r^4+\frac{b^3r^2}{r-b}\right)+\left(2r^2+3br-\frac{b^2r}{r-b}\right)a^2-a^4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

のうちa^2の係数の最後の項$\frac{b^2r}{r-b}$は$\frac{b^2r}{4(r-b)}$の間違いである．従って(d)の方程式を訂正して

b_1r にそれぞれ $r=l$，$b=l/6$ を代入して整頓すると(c)が得られる．